مثال تلول من 106 المطلوب .

الموضوع 6 نصف النظيم . التاريخ 15/11/2017

كل تطبيق خطي هو تابع محدب .

المجموعة المتوازنة:

لتكن X $\supseteq E \neq \emptyset$ تسمى E متوازنة إذا فقط إذا كان

$\forall x \in E ; |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in E .$

الماصة:

نقول عن X $\supseteq E \neq \emptyset$ أنها مجموعة ماصة $\Leftrightarrow$

$\exists x \in X , \exists \rho = \rho(x) > 0$ ؛

إذا كان $|\lambda| \leq \rho$ فإن $\lambda x \in E$.

نصف النظيم:

ليكن الفضاء الخطي X . نسمي التابع $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ نصف نظيم

إذا حقق ما يلي:

1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad ; \forall \lambda \in \mathbb{C} , \forall x \in X .$

2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) ; \forall x , y \in X$

3) $p(\theta) = 0$

لأنه: $p(\theta) = p(0 x) = 0 \, p(x) = 0$

4) $p(x) \geq 0 .$

$0 = p(\theta) = p(x + (-x)) \leq p(x) + |-1| . p(x) = 2p(x) .$

$p(x) \geq 0$

$p(x)$ هو تطبيق محدب . لأنه:

إذا كان λ , μ موجبان بحيث: $\lambda + \mu = 1$

$x + y \in E \subseteq X . \quad , \quad \lambda x + \mu y \in E .$

$p(\lambda x + \mu y) \leq p(\lambda x) + p(\mu y) \leq$

$|\lambda| . p(x) + |\mu| p(y) \leq \lambda p(x) + \mu p(y) .$

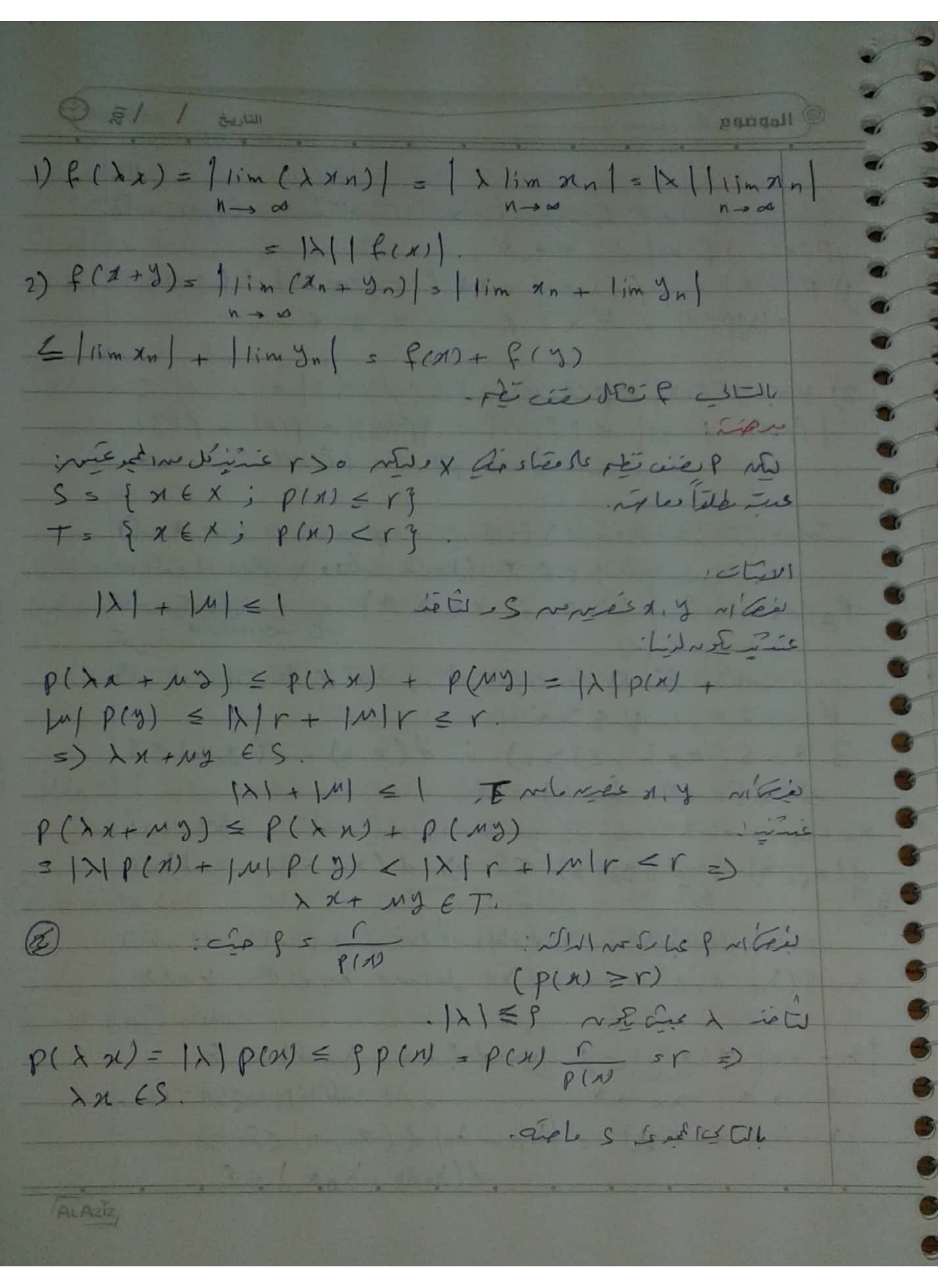
مثال:

ليكن $f(x) = |\lim_{n \to \infty} \xi \, x_n|$

$\{x_n\}$ متتالية من S إن هذا التابع نصف نظيم لأنه:

إذا كان $\lambda \in \mathbb{C}$ وإذا كان $x \in S$ فإن:

ALAziz



1) $f(\lambda x) = \left|\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n)\right| = \left|\lambda \lim_{n\to\infty} x_n\right| = |\lambda| \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$

$= |\lambda| \, |f(x)|.$

2) $f(x+y) = \left|\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n)\right| = \left|\lim x_n + \lim y_n\right|$

$\leq |\lim x_n| + |\lim y_n| = f(x) + f(y)$

بالتالي p تشكل نصف نظيم.

مبرهنة:

ليكن p نصف نظيم على فضاء خطي X وليكن $r > 0$ عندئذٍ كل من المجموعتين:

$S = \{x \in X \,;\, p(x) \leq r\}$

$T = \{x \in X \,;\, p(x) < r\}.$

محدبة مطلقاً وماصة.

الإثبات:

نفرض أن x, y عنصرين من S، ولنأخذ $|\lambda| + |\mu| \leq 1$

عندئذٍ يكون لدينا:

$p(\lambda x + \mu y) \leq p(\lambda x) + p(\mu y) = |\lambda| p(x) + |\mu| p(y) \leq |\lambda| r + |\mu| r \leq r.$

$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in S.$

نفرض أن x, y عنصرين من T، $|\lambda| + |\mu| \leq 1$

عندئذٍ:

$p(\lambda x + \mu y) \leq p(\lambda x) + p(\mu y)$

$= |\lambda| p(x) + |\mu| p(y) < |\lambda| r + |\mu| r < r \Rightarrow$

$\lambda x + \mu y \in T.$

(ج) نفرض أن ρ عبارة عن الدالة: $\rho = \dfrac{r}{p(x)}$ حيث:

$(p(x) \geq r)$

لنأخذ λ بحيث يكون $|\lambda| \leq \rho$.

$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leq \rho\, p(x) = p(x) \dfrac{r}{p(x)} = r \Rightarrow$

$\lambda x \in S.$

بالتالي المجموعة S ماصة.

مثال:

لتكن $f(x)$ دالة خطية معرفة على X وتأخذ قيمها في $\mathbb{C}$ ولنعرف

$p(x) = |f(x)|\ ;\ x \in X$.

1) $p(\lambda x) = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| . |f(x)|$
$= |\lambda| p(x)\ ;\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in X$.

2) $\forall x, y \in X,\ p(x+y) = |f(x+y)| =$
$|f(x) + f(y)| \le |f(x)| + |f(y)| = p(x) + p(y)$.

$\Leftarrow$ $p(x) = |f(x)|$ نصف نظيم على X.

ملاحظة:

لتكن A مجموعة جزئية $\neq \emptyset$ ومحدبة مطلقاً (مجموعة محدبة ومتوازنة) وماصة من الفضاء الخطي X ولنأخذ من أجل أي $x \in X$ التطبيق:

$P_A(x) = \inf \{ \lambda > 0\ ;\ x \in \lambda A \} \rightarrow$ تابع مينكوفسكي عبارة عن نصف نظيم

تعريف:

لتكن d مسافة على X نقول إن d جمعية مستمرة إذا وفقط إذا كان:

$\forall a, b \in X,\ \forall \varepsilon > 0$:

$\exists\ \delta = \delta(a, b, \varepsilon) > 0\ ;\ d(x, a) + d(y, b) < \delta$
$\Rightarrow d(x+y, a+b) < \varepsilon$.

أي: إذا كان $x_n \to a$, $y_n \to b$ فإن $x_n + y_n \to a + b$

$\underbrace{d(x_n, a)}_{<\delta/2} + \underbrace{d(y_n, b)}_{<\delta/2} < \delta \Rightarrow d(x_n + y_n, a+b) < \varepsilon$

تعريف:

إذا كان (X, d) ف.م.خ عندئذٍ نقول أن الجداء بعدد مستمر في هذا الفضاء إذا كان:

$\forall a \in X,\ \lambda_0 \in \mathbb{C}$ ومن أجل $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta = \delta(\lambda_0, a, \varepsilon)$

حيث إذا كان:

$|\lambda - \lambda_0|\ d(x, a) < \delta \Rightarrow d(\lambda x, \lambda_0 a) < \varepsilon$.

• بالمتتاليات: إذا كان: $x_n \to a$, $\lambda_n \to \lambda_0$

$|\lambda - \lambda_0|\ d(x, a) = |\lambda_n - \lambda_0|\ d(x_n, a) < \delta \Rightarrow$
$d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a) < \varepsilon$.

المسافات اللاتغيرية الإنسحاب:

لتكن d مترية على الفضاء X تسمى d مسافة لاتغيرية الإنسحاب (عبر)

$d(x+z, y+z) = d(x,y) \; ; \; \forall x,y,z \in X$

مثال: $\forall d(x,y) = |x^3 - y^3|$.

$x=1, \; y=0, \; z=1$

$d(x+z, y+z) = d(1+1, 1) = |(2)^3 - (1)^3| = 7.$

$d(x,y) = d(1,0) = 1 \neq 7.$

فضاء فريشيه:

هو كل فضاء خطي متري تام.

الفضاء المتري الخطي:

لتكن X فضاء خطي مع المسافة d حيث d لاتغيرية الانسحاب عندئذ نسمي الفضاء (X,d) متري خطياً اذا كانت d مع العملية الجمعية وعملية الجداء بعدد مستمرتين في الفضاء (X,d).

ملاحظة:

في الفضاء الإقليدي مرتبط بمفهوم النهاية والاستقرار.

تعريف:

لتكن E جملة خطية معرفة لأجزاء منفصلة وتبولوجيا معطاة لجملة جوارات حيث $x \in E$ نسمي E فضاء تبولوجيا خطياً اذا كانت العمليات الجبرية مستمرة على تبولوجيا T. أي أنه:

① $\forall x,y \in E \; , \; V_{x+y} \in T \; ; \; \exists V_x , V_y \; ;$

(V_{x+y}: جوار للعنصر $x+y$ ، V_x: جوار x ، V_y: جوار y)

$V_x + V_y \subseteq V_{x+y}.$

② $\forall \lambda \; ; \; \forall x \in E \; , \; \delta > 0 \; , \; V_{\lambda x} \; , \; \exists V_x \; ; \; |\mu - \lambda| < \delta$

($V_{\lambda x}$: جوار للعنصر λx ، x: العنصر x)

$\mu V_x \subseteq V_{\lambda x}.$

تعريف المتغير الكلي:

لنأخذ الفضاء المتري الخطي (X, d) والتابع الدالة $g(x)$ بحيث:

$g(x) = d(x, \theta)$ ؛ θ صفر الفضاء X

عندئذٍ التابع g يحقق الشروط الآتية:

1) $g : X \to \mathbb{R}$
2) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.
3) $g(x+y) \le g(x) + g(y) \ ; \ \forall x, y \in X$.
4) $g(-x) = g(x) \ ; \ \forall x \in X$.
5) $\forall \lambda_0, \lambda_n \in \mathbb{C} \ , \ a, x_n \in X$

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 \ , \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

$$g(x_n - a) \to 0$$

وإذا كانت $\lambda_n x_n \to \lambda_0 a$ فإن:

$$g(\lambda_n x_n - \lambda_0 a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

تعريف العكس:

إذا كان X فضاء خطي وكان g تابع يحقق الشروط الواردة أعلاه عندئذٍ نعرف d بالشكل:

$d(x, y) = g(x - y)$ ، (X, d) فضاء متري خطي

ملاحظة:

إن التابع g المحقق الشروط السابقة يسمى عادة المنظم الكلي ونسمي (X, g) فضاء خطي منظم كلي.

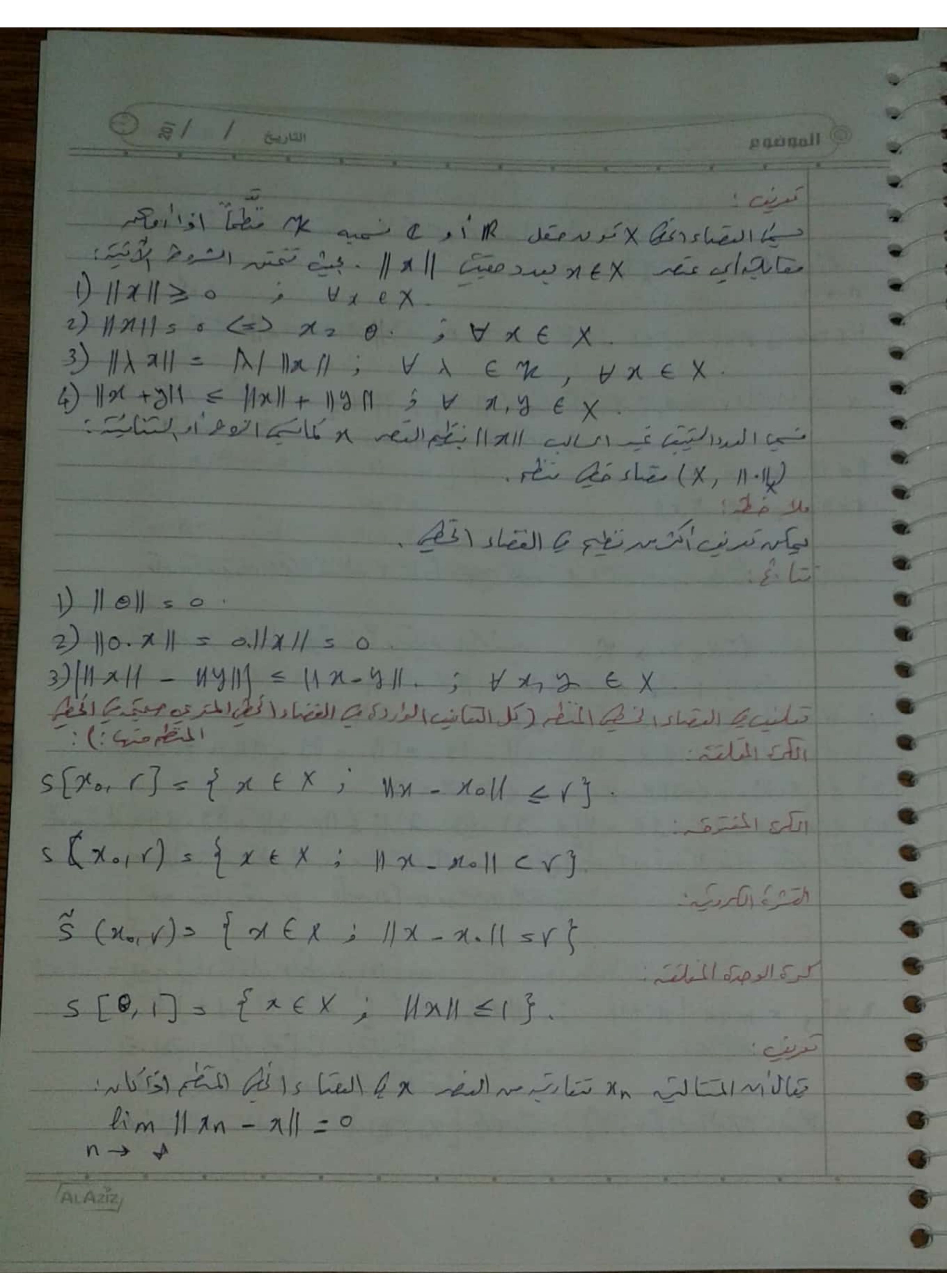
أما إذا حقق التابع الشروط: ①، ③، ④، ⑤ وكان $g(\theta) = 0$ نسمي g تابع منظم على X. عندئذٍ (X, g) يسمى فضاءً منظماً.

نتيجة:

إن كل تقنين نظيم هو منظم على X. ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

الفضاء الخطي المنظم:

إن الفضاء المنظم هو نوع خاص من الفضاءات المنظمة كلياً بالتالي هو نوع خاص من الفضاءات المترية الخطية.



الموضوع التاريخ / / 20

تعريف:

نسمي الفضاء الخطي X المعرف على حقل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ نسميه K فضاءً منظماً إذا أمكن مقابلة أي عنصر $x \in X$ بعدد حقيقي $\|x\|$ بحيث تتحقق الشروط الآتية:

1) $\|x\| \geq 0 \;;\; \forall x \in X.$
2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta \;;\; \forall x \in X.$
3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \;;\; \forall \lambda \in K ,\ \forall x \in X.$
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;;\; \forall x, y \in X.$

نسمي العدد الحقيقي غير السالب $\|x\|$ بنظيم العنصر x كما نسمي الزوج او الثنائية $(X, \|\cdot\|_X)$ فضاء خطي منظم.

ملاحظة:

يمكن تعريف أكثر من نظيم في الفضاء الخطي.

نتائج:

1) $\|\theta\| = 0.$
2) $\|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0.$
3) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| \;;\; \forall x, y \in X.$

تطبيق في الفضاء الخطي المنظم (كل التعاريف الواردة في الفضاء المتري تطبق على الخطي المنظم منها):

الكرة المغلقة:

$$S[x_0, r] = \{x \in X \;;\; \|x - x_0\| \leq r\}.$$

الكرة المفتوحة:

$$S(x_0, r) = \{x \in X \;;\; \|x - x_0\| < r\}.$$

القشرة الكروية:

$$\tilde{S}(x_0, r) = \{x \in X \;;\; \|x - x_0\| = r\}$$

كرة الوحدة المغلقة:

$$S[\theta, 1] = \{x \in X \;;\; \|x\| \leq 1\}.$$

تعريف:

يقال ان المتتالية x_n تتقارب من العنصر x في الفضاء الخطي المنظم اذا كان:

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

تعريف:

يُقال أن المتتالية x_n كوشي في الفضاء الخطي المنظم:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

أو:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ ; \ \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

تعريف:

نقول عن نظيمين: $\|\cdot\|_1 , \|\cdot\|_2$ أنهما متكافئان في الفضاء الخطي المنظم X إذا وجد عددان $A, B > 0$ بحيث يكون:

$$\|x\|_1 \leq A \|x\|_2 .$$
$$\|x\|_2 \leq B \|x\|_1 .$$

مبرهنة:

يكون الفضاء الخطي المنظم X تاماً $\Leftrightarrow$ كل متسلسلة متقاربة مطلقاً تكون متقاربة.

ملاحظة:

ليكن X فضاءً خطياً منظماً ولنكن التطبيق

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|.$$

1) $\forall x, y \in X \ ; \ d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$

2) $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x).$

3) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y.$

4) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d + d$

من هنا نجد أن النظيم يعرّف مسافة في الفضاء الخطي المنظم أي أن كل فضاء خطي منظم هو فضاء متري. لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

تمرين:

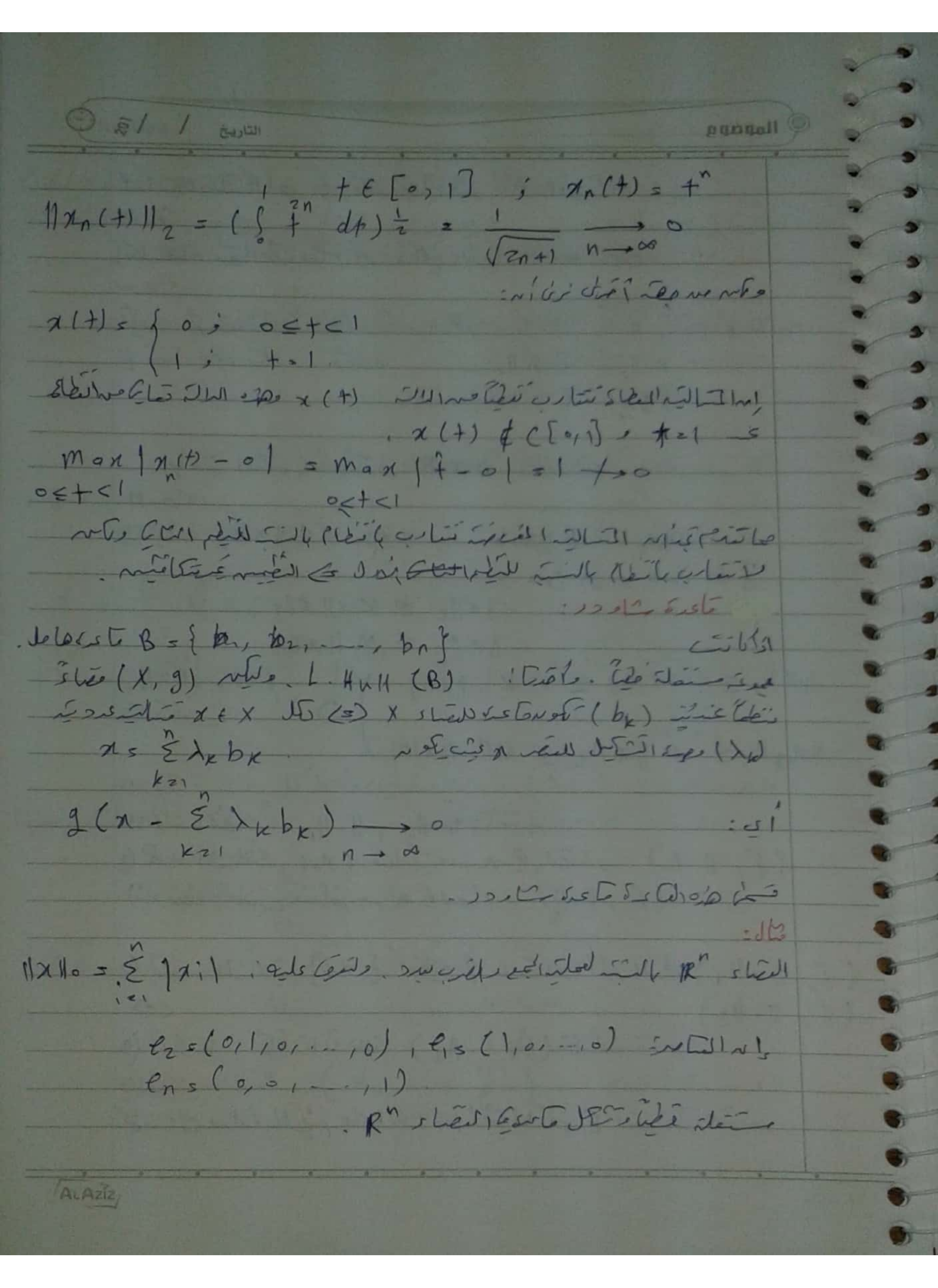
بيّن فيما إذا كان النظيمان الآتيين:

$$\|x\|_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \ ; \ \|x\|_2 = \left(\int_0^1 x^2(t) \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

في الفضاء $C[0,1]$ متكافئين.

الحل: لنبيّن أن النظيمين غير متكافئين.

لنأخذ المتتالية: $\{x_n(t)\}$ في الفضاء $C[0,1]$ المعرّفة بالشكل:



$t \in [0,1]$; $x_n(t) = t^n$

$$\|x_n(t)\|_2 = \left(\int_0^1 t^{2n}\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومن جهة أخرى نرى أنه:

$$x(t) = \begin{cases} 0 ; & 0 \le t < 1 \\ 1 ; & t = 1 \end{cases}$$

إن المتتالية المعطاة تتقارب نقطياً من الدالة $x(t)$ وهذه الدالة قطعاً من القطعة عند $t=1$ ، $x(t) \notin C[0,1]$.

$$\max_{0\le t<1} |x_n(t) - 0| = \max_{0\le t<1} |t^n - 0| = 1 \not\to 0$$

مما تقدم نجد أن المتتالية المفروضة تتقارب بانتظام بالنسبة للنظيم التكاملي ولكنها لا تتقارب بانتظام بالنسبة للنظيم ~~التكاملي~~ يدل على أن النظيمين غير متكافئين .

قاعدة شاودر:

إذا كانت $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ قاعدة هامل . عناصرها مستقلة خطياً . مما قدمنا: L.HuH (B) . ولتكن (X, g) فضاء نظيمياً عندئذ (b_k) تكون قاعدة للفضاء X $(\Leftrightarrow)$ لكل $x \in X$ متتالية عددية (λ_k) وحيدة التشكيل للعنصر x بحيث يكون $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$.

أي:

$$g\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

تسمى هذه القاعدة قاعدة شاودر .

مثال:

الفضاء $\mathbb{R}^n$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بعدد ، والنظيم عليه: $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

إن المتتالية: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ، $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$
$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

مستقلة خطياً وتشكل قاعدة للفضاء R^n .

أما فضاء المتتاليات s فهو فضاء غير منتهي الأبعاد.

ملاحظة:

إن كل فضاء خطي منظم غير منتهي الأبعاد ~~ليس~~ غير معدود.

مبرهنة:

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ولتكن النظيم: $\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|_2$ ، $\|\cdot\|_3$ (معرفة على E) حيث E فضاء خطي منظم. وأن $\|\cdot\|_1$ يكافئ $\|\cdot\|_2$
$\|\cdot\|_1$ يكافئ $\|\cdot\|_3$

أثبت: النظيم الثلاثة ~~[illegible]~~ متكافئة.

البرهان:

لدينا: $\|x\|_1 \leq A \|x\|_2$ ، $\|x_2\| \leq B \|x_1\|$

$\exists K > 0 , M > 0 ;$

$$\|x\|_2 \leq K \|x\|_3 .$$

$$\|x\|_3 \leq M \|x\|_2 .$$

$$\left.\begin{array}{l} \|x\|_1 \leq A \|x\|_2 \leq A \cdot K \cdot \|x\|_3 \\ \|x_3\|_3 \leq M \|x\|_2 \leq MB \|x\|_1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\|x\|_3$ ، $\|x\|_1$ متكافئان.

ملاحظة:

إذا كان النظيمين $\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|_2$ متكافئين:

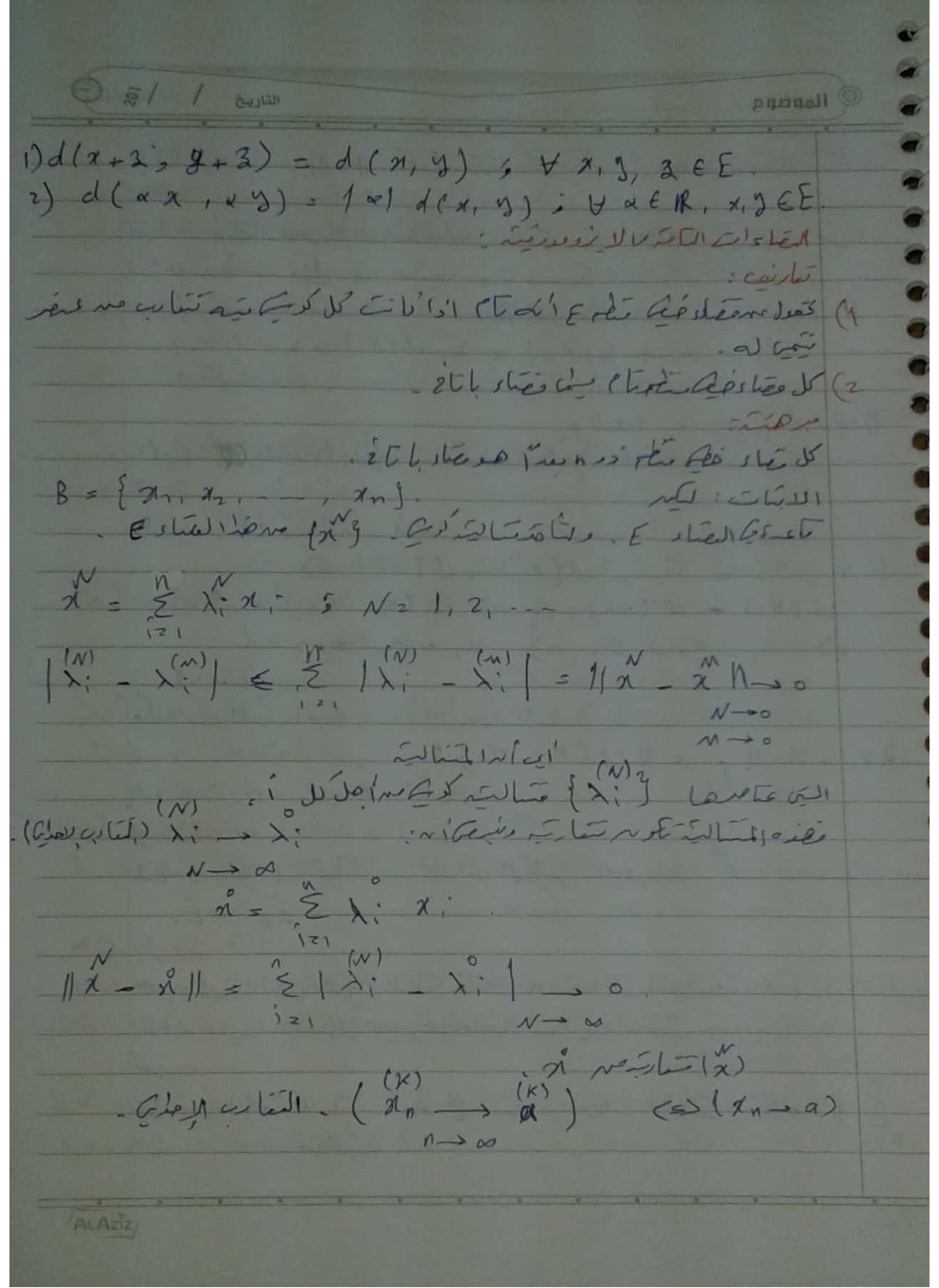
1) تكون المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من x في الفضاء $(E, \|\cdot\|_1)$ إذا وفقط إذا كانت متقاربة من x في الفضاء $(E, \|\cdot\|_2)$.

2) تكون المتتالية $\{x_n\}$ كوشي في الفضاء الخطي المنظم $(E, \|\cdot\|_1)$
⟺ " " " " " " $(E, \|\cdot\|_2)$.

3) $(E, \|\cdot\|_1)$ تام إذا وفقط إذا $(E, \|\cdot\|_2)$ تام.

ملاحظة:

كل مجموعة محدودة بالنظيم على الفضاء الخطي المنظم E [illegible]


التاريخ / / 20 — الموضوع

1) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$; $\forall x, y, z \in E$.
2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y)$; $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in E$.

الفضاءات التامة والايزومترية :

تعاريف :

1) نقول عن فضاء خطي منظم E أنه تام اذا كانت كل كوشية متتابعة متقاربة من عنصر ينتمي له.

2) كل فضاء خطي منظم تام يسمى فضاء باناخ.

مبرهنة :

كل فضاء خطي منظم ذو n بعداً هو فضاء باناخ.

الاثبات : لتكن $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
قاعدة في الفضاء E . ولتكن متتابعة كوشي $\{x^N\}$ من هذا الفضاء E .

$$x^N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^N x_i \quad ; \quad N = 1, 2, \dots$$

$$\left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(m)}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(m)}\right| = \|x^N - x^m\| \underset{\substack{N\to\infty \\ m\to\infty}}{\longrightarrow} 0$$

أي أن المتتالية

التي عناصرها $\{\lambda_i^{(N)}\}$ متتالية كوشي من أجل كل i ،
فهذه المتتالية تكون متقاربة ولنفرض أنها : $\lambda_i^{(N)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_i^{0}$ (التقارب العادي).

$$x^0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 x_i .$$

$$\|x^N - x^0\| = \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^0\right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

(x^N) متقاربة من x^0

لدى $(x_n \to a)$ $\left(x_n^{(k)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^{(k)} \right)$. التقارب الإحداثي.

AlAziz

بالتالي: $(E, \|\ \|)$ فضاء خطي منظم تام وبالتالي فضاء باناخ.

تعريف:

نقول عن فضاءين خطيين منظمين E_1, E_2 أنهما ايزومتريان لبعضهما إذا وجد تطبيق خطي φ حيث: $\varphi: E_1 \to E_2$ تقابلي ويحقق:

$$\forall x_1, x_2 \in E_1, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K :$$

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2).$$

φ تطبيق خطي.

$$\|\varphi(x)\|_{E_2} = \|x\|_{E_1}$$

أي أن φ يحافظ على النظيم. فالتطبيق φ بهذه الحالة ايزومتري.

ملاحظة:

التطبيق φ متباين. لأن:

$$\forall x_1, x_2 \in E_1, \ \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow$$

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \theta_2 \Rightarrow \varphi(x_1 - x_2) = \theta_2$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \theta_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$

φ متباين.

وكذلك بطريقة أخرى:

$$\|x_1 - x_2\|_{E_1} = \|\varphi(x_1 - x_2)\|_{E_2} = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = \theta_1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

نتيجة:

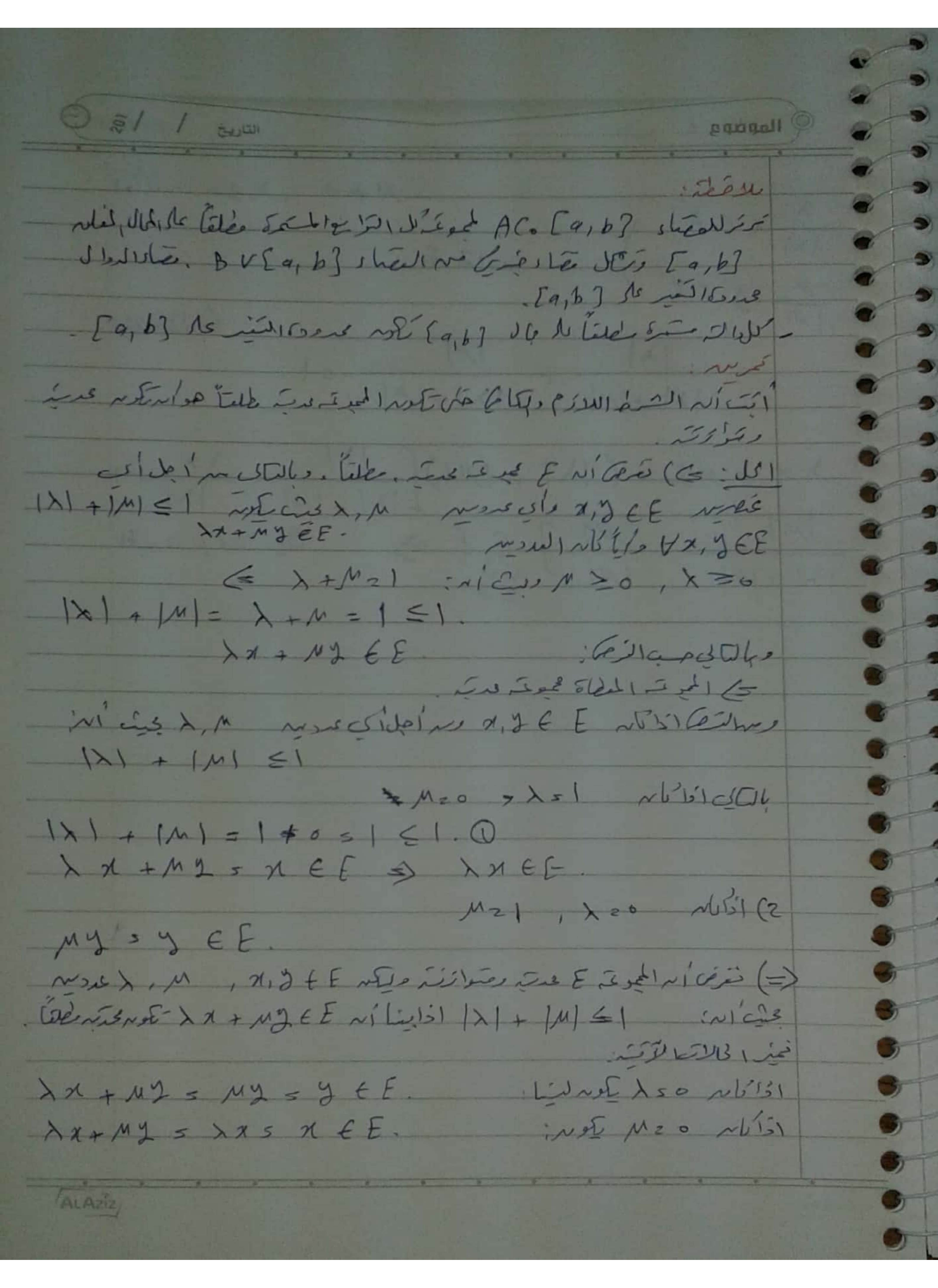
التطبيق الخطي φ تقابلي ويحافظ على النظيم. ويوجد له φ^{-1} ايزومتري من $E_2 \to E_1$

ملاحظة:

جميع الفضاءات الخطية المنظمة ذات n بعد تكون ايزومترية للفضاء الإقليدي ذي n بعد. بالتالي جميع هذه الفضاءات ايزومترية فيما بينها.

تعريف:

نقول أن المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة مطلقاً إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ متقاربة.



ملاحظة:

نرمز للفضاء لمجموعة كل الدوال المستمرة مطلقاً على المجال المغلق $AC_0[a,b]$ [a,b] وتشكل فضاء جزئي من الفضاء $BV[a,b]$ فضاء الدوال محدودة التغير على $[a,b]$.

- كل دالة مستمرة مطلقاً على مجال $[a,b]$ تكون محدودة التغير على $[a,b]$.

تمرين:

أثبت أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون المجموعة محدبة مطلقاً هو أن تكون محدبة ومتوازنة.

الحل: (⇐) نفرض أن E مجموعة محدبة مطلقاً، وبالتالي من أجل أي عنصرين $x,y \in E$ وأي عددين λ, μ بحيث يكون $|\lambda| + |\mu| \le 1$
$\lambda x + \mu y \in E$.

وإذا كان العددين $\forall x, y \in E$

$\lambda \ge 0 ,\ \mu \ge 0$ وبحيث أن: $\lambda + \mu = 1$ ⇐

$|\lambda| + |\mu| = \lambda + \mu = 1 \le 1$.

وبالتالي حسب الفرض: $\lambda x + \mu y \in E$

⇐ المجموعة المعطاة مجموعة محدبة.

وبالتالي إذا كان $x, y \in E$ ومن أجل أي عددين λ, μ بحيث أن:

$|\lambda| + |\mu| \le 1$

بالتالي إذا كان $\lambda = 1 ,\ \mu = 0$

$|\lambda| + |\mu| = 1 + 0 = 1 \le 1$. ①

$\lambda x + \mu y = x \in E \Rightarrow \lambda x \in E$.

2) إذا كان $\lambda = 0 ,\ \mu = 1$

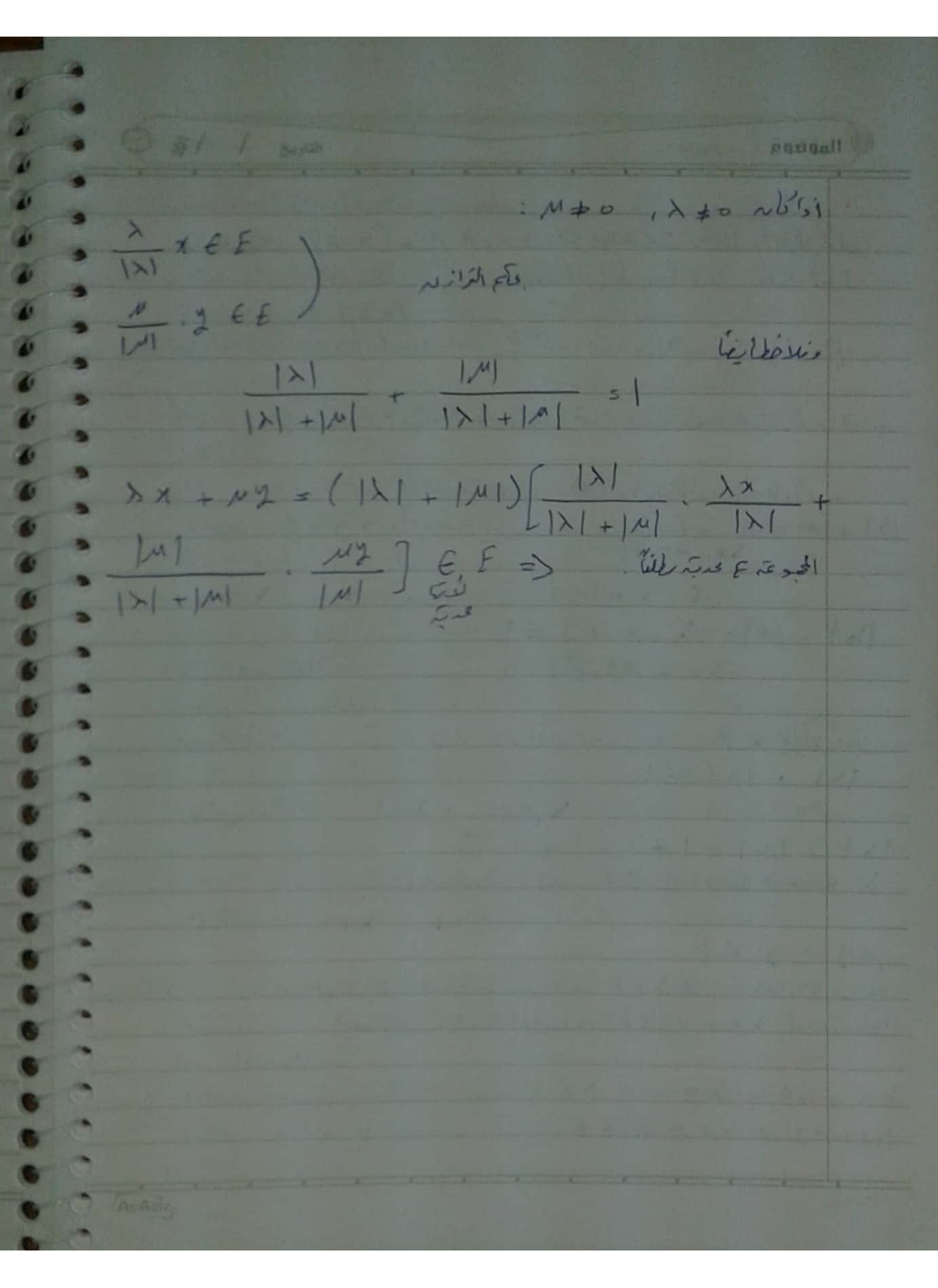
$\mu y = y \in E$.

(⇒) نفرض أن المجموعة E محدبة ومتوازنة ولتكن $x, y \in E$ ، λ, μ عددين بحيث أن: $|\lambda| + |\mu| \le 1$ إذا بينا أن $\lambda x + \mu y \in E$ تكون محدبة مطلقاً.

نميز الحالات الآتية:

إذا كان $\lambda = 0$ يكون لدينا: $\lambda x + \mu y = \mu y = y \in E$.

إذا كان $\mu = 0$ يكون: $\lambda x + \mu y = \lambda x = x \in E$.



إذا كان $\lambda \neq 0$ ، $\mu \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in E \\ \frac{\mu}{|\mu|} y \in E\end{array}\right)$$ بحكم التناظر

ونلاحظ أيضاً

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|} = 1$$

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|)\left[\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|} \cdot \frac{\lambda x}{|\lambda|} + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|} \cdot \frac{\mu y}{|\mu|}\right] \in E \Rightarrow$$ المجموعة E محدبة مطلقاً.

(لأنها محدبة)